ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. № 180. № 12.

Содержаніе: Новыя доказательства теоремъ объ измѣреніи объемовъ. *П. Свѣшникова.*—Симметрично-обратное преобразованіе фигуръ, (окончаніе). *Д. Ефремова.*—Смѣсь.—Доставленныя въ редакцію книги и брошюры. — Задачи на испытаніяхъ зрѣлости.—Задачи №№ 586—591. —Математическая шутка № 2.—Рѣшенія задачъ 2-ой сер. №№ 198, 307, 355, 446, 465, 475, 487, 489, 491 и 1-ой сер. № 541. — Запоздавшія рѣшенія.—Нерѣшенныя задачи.—Обзоръ научныхъ журналовъ. *Д. Е.*—Объявленія.

НОВЫЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЪ
объ измѣреніи объемовъ.

Во всѣхъ учебникахъ элементарной геометріи принятъ одинъ и тотъ-же порядокъ при выводѣ теоремъ объ измѣреніи объемовъ. Конечно, этотъ порядокъ можетъ быть измѣненъ различнымъ образомъ. Осмѣливаюсь предложить вниманію читателей одно изъ такихъ измѣненій, при которомъ доказательства если и не упрощаются, то во всякомъ случаѣ не дѣлаются сложнѣе.

Доказательства теоремъ объ отношеніи объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ и объ измѣреніи объема прямоугольнаго параллелепипеда остаются прежнія.

1. *Объемъ прямого параллелепипеда измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту.*

Далѣе должна быть доказана теорема: *всякая наклонная призма равновелика прямой призмѣ, у которой основаніе есть сѣченіе, перпендикулярное къ ребрамъ наклонной призмы, а высота есть ребро наклонной призмы.*

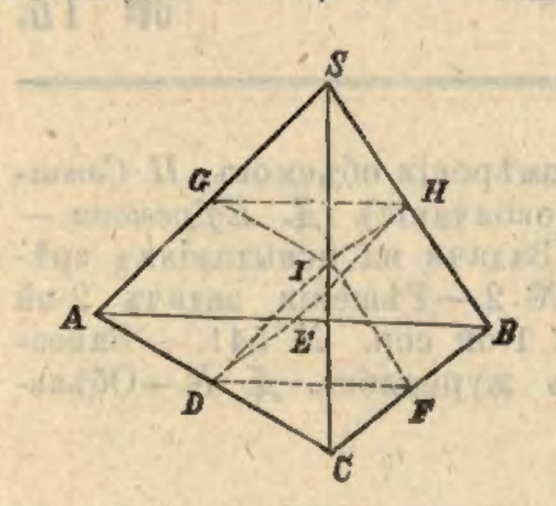
2. *Объемъ наклоннаго параллелепипеда измѣряется произведеніемъ площади основанія на высоту.*

Слѣдствіе: *параллелепипеды, имѣющіе общее основаніе и равныя высоты, равновелики.* Оно доказывается во всѣхъ учебникахъ при помощи двухъ довольно сложныхъ чертежей.

Послѣ этого должна быть доказана теорема: *наклонный параллелепипедъ дѣлится діагональною плоскостью на двѣ равновеликихъ тре-*

гольныхъ призмы. Отсюда выводятся двѣ теоремы: *а) объемъ треугольной призмы измѣряется произведенiемъ площади основанiя на высоту; b) объемъ треугольной призмы измѣряется половиной произведенiя площади боковой грани на длину перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ какой-нибудь точки противуположнаго ребра.* Затѣмъ можно вывести теорему: *объемъ многоугольной призмы равняется произведенiю площади основанiя на высоту или произведенiю площади сѣченiя, перпендикулярнаго къ боковымъ ребрамъ, на ребро.*

3. *Объемъ треугольной пирамиды измѣряется одной третью произведенiя площади основанiя на высоту* (Фиг. 55).



Фиг. 55.

Обозначимъ площадь основанiя ABC треугольной пирамиды SABC черезъ S и высоту ея черезъ h. Проводимъ среднее сѣченiе GHJ. Оно раздѣлитъ боковыя ребра SA, SB, SC пополамъ. Изъ точекъ J и H проводимъ прямыя, параллельныя SA, до пересѣченiя съ AC и AB въ точкахъ D и E. Тогда прямыя AC и AB раздѣлятся пополамъ. Изъ точки J проводимъ прямую JF, параллельную SB. Тогда BC раздѣлится пополамъ. Проводимъ прямыя DE и DF. Треугольники GHJ, AED и DFC будутъ равны между собою. Площадь каждаго изъ нихъ равна S:4. Фигура DEBF есть параллелограммъ, площадь котораго равна S:2. Треугольная пирамида SABC раздѣлиласьна 4 части: на 2 равныхъ треугольныхъ пирамиды SGHJ и JDFC, на треугольныя призмы ADEGJH и DJFEHB. Объемъ ADEGJH равенъ $\frac{S}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{Sh}{8}$. Объемъ DJFEHB равенъ половинѣ произведенiя площади DEBF на разстоянiе прямой JH отъ плоскости ABC, т. е. $\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{Sh}{8}$. Обозначивъ объемъ данной пирамиды SABC черезъ v и объемъ пирамиды SGHJ черезъ x_1, находимъ:

$$v = 2x_1 + \frac{Sh}{4}.$$

Это равенство выражаетъ слѣдующую теорему: объемъ треугольной пирамиды равенъ удвоенному объему пирамиды, имѣющей основанiе въ четыре раза мѐньшее и высоту въ два раза меньшую, сложенному съ объемомъ призмы, имѣющей основанiе въ четыре раза меньшее и высоту ту-же самую, какъ и данная пирамида. Объемъ x_1, можно по этой теоремѣ разложить на двѣ равныхъ пирамиды x_2, имѣющiя основанiе $\frac{S}{4}:4=\frac{S}{4^2}=\frac{S}{16}$ и высоту $\frac{h}{2}:2=\frac{h}{2^2}=\frac{h}{4}$ и на треугольную призму, имѣющую основанiе $\frac{S}{16}$ и высоту $\frac{h}{2}$. Слѣдовательно,

$$x_1 = 2x_2 + \frac{Sh}{32}.$$

Объемъ x_2 можно разложить на двѣ равныя пирамиды x_3, имѣю-

щія основаніе $\frac{S}{4^3}=\frac{S}{64}$ и высоту $\frac{h}{2^3}=\frac{h}{8}$ и на призму, имѣющую основаніе $\frac{S}{64}$ и высоту $\frac{h}{4}$. Слѣдовательно,

$$x_2=2x_3+\frac{Sh}{256}.$$

Положимъ, что мы сдѣлали указанныя дѣленія n разъ. Тогда

$$x_{n-1}=2x_n+\frac{Sh}{2^{3n-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, при n-омъ дѣленіи получатся двѣ равныя пирамиды, имѣющія основаніе $\frac{S}{4^n}=\frac{S}{2^{2n}}$ и высоту $\frac{h}{2^n}$ и призма, имѣющая основаніе $\frac{S}{2^{2n}}$ и высоту $\frac{h}{2^{n-1}}$.

Умножая второе изъ полученныхъ равенствъ на 2, третье на 2^2, и т. д., наконецъ послѣднее (n-ое) на 2^{n-1} и складывая ихъ почленно, получимъ по сокращеніи

$$v=2^n x_n+\frac{Sh}{4}+\frac{Sh}{16}+\frac{Sh}{64}+\ldots\ldots+\frac{Sh}{2^{2n}}.$$

Объемъ пирамиды, имѣющей основаніе и высоту общія съ призмой, будетъ менѣе объема этой призмы. Поэтому

$$x_n<\frac{S}{2^{2n}}\cdot\frac{h}{2^n}, \text{ откуда } 2^n x_n<\frac{Sh}{2^{2n}}.$$

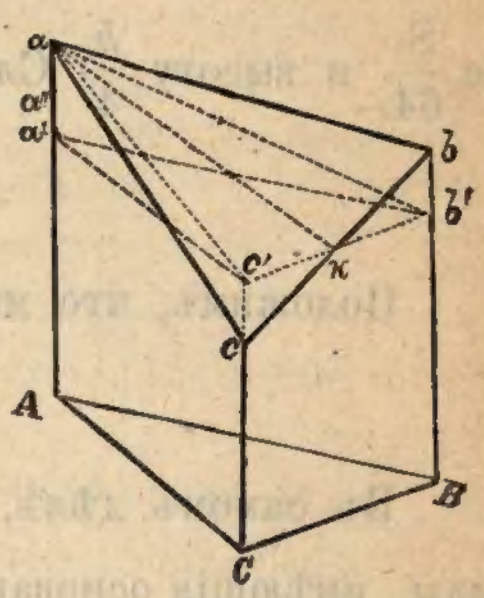
При увеличеніи n величина $2^n x_n$ безпредѣльно уменьшается и можетъ быть сдѣлана при достаточно большомъ значеніи n менѣе всякой напередъ заданной величины.

Обозначимъ сумму $\frac{Sh}{4}+\frac{Sh}{16}+\frac{Sh}{64}+\ldots\ldots+\frac{Sh}{4^n}$ черезъ v'. Тогда $v=v'+2^n x_n$. Величина v' есть перемѣнная, зависящая отъ числа дѣленій n, увеличивающаяся при каждомъ новомъ дѣленіи, но не превосходящая постоянной величины v. Разность $v-v'$ равная $2^n x_n$ есть величина безконечно малая. Значитъ v есть предѣлъ v'. Но предѣлъ v' легко опредѣляется, какъ сумма безконечно-нисходящей прогрессіи, у которой первый членъ $\frac{Sh}{4}$ и знаменатель $\frac{1}{4}$. Слѣдовательно

$$v=\frac{Sh}{4}:\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{Sh}{3}.$$

Далѣе выводится теорема: *объемъ многоугольной пирамиды равняется площади основанія, умноженной на треть высоты.* Отсюда можно вывести слѣдствіе: *всякая пирамида равновелика призмѣ, у которой основаніе есть то же, а боковыя ребра параллельны одному изъ боковыхъ реберъ пирамиды и равны одной трети этого ребра.*

4. *Усѣченная (непараллельно основанію) треугольная призма равновелика призмѣ, у которой основаніе то же, а каждое боковое ребро есть средняя ариѳметическая реберъ усѣченной призмы и имѣетъ то же направленіе.*



Фиг. 56.

Вообразимъ усѣченную треугольную призму $ABCabc$, у которой наибольшее ребро есть Aa и наименьшее Cc (фиг. 56). Черезъ средину k прямой bc проводимъ прямую $b'c'$ параллельную BC. По свойству трапеціи

$$Bb'=Cc'=\frac{Bb+Cc}{2}.$$

Проводимъ прямыя ak, ab', ac'. Треугольныя пирамиды $akbb'$ и $akcc'$ равновелики, такъ какъ основанія ихъ kbb' и kcc' равны, а высота у нихъ общая и равна разстоянію точки a отъ плоскости Bc. Отрѣзавъ отъ усѣченной призмы $ABCabc$ треугольную пирамиду $akbb'$ и прибавивъ вмѣсто нее равновеликую треугольную пирамиду $akcc'$, получимъ усѣченную призму $ABCab'c'$. Такимъ образомъ обѣ эти усѣченныя призмы равновелики. Проводимъ черезъ прямую $b'c'$ плоскость, параллельную основанію ABC. Она пересѣчетъ ребро Aa въ точкѣ a' и плоскости Ac и Ab по прямымъ $a'c'$ и $a'b'$, параллельнымъ AC и AB. Усѣченная призма $ABCab'c'$ состоитъ изъ призмы $ABCa'b'c'$ и треугольной пирамиды $aa'b'c'$. Эту пирамиду можно замѣтить равновеликой призмой, у которой основаніе есть $a'b'c'$, а боковыя ребра параллельны Aa и равны по величинѣ $\frac{aa'}{3}$. Пусть эта призма будетъ $a'b'c'a''b''c''$. Конечно, треугольники ABC, $a'b'c'$ и $a''b''c''$ равны между собою. Такимъ образомъ треугольная призма $ABCa''b''c''$ равновелика данной усѣченной призмѣ $ABCabc$. Такъ какъ

$$Aa''=Aa'+a'a'' \text{ и } Aa'=Bb'=\frac{Bb+Cc}{2},$$

$$a'a''=\frac{aa'}{3}=\frac{Aa-Aa'}{3}=\frac{Aa}{3}-\frac{Bb+Cc}{6}, \text{ то}$$

$$Aa''=\frac{Aa+Bb+Cc}{3}.$$

Опускаемъ перпендикуляры $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $a''\alpha''$ на основаніе ABC. Изъ подобія треугольниковъ $Aa\alpha$, $Bb\beta$, $Cc\gamma$, $Aa''\alpha''$ находимъ

$$\frac{Aa}{a\alpha}=\frac{Bb}{b\beta}=\frac{Cc}{c\gamma}=\frac{Aa''}{a''\alpha''},$$

откуда

$$\frac{Aa+Bb+Cc}{3}:\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{3}=Aa'':a''\alpha''.$$

Такъ какъ $Aa''=\frac{Aa+Bb+Cc}{3}$,

то

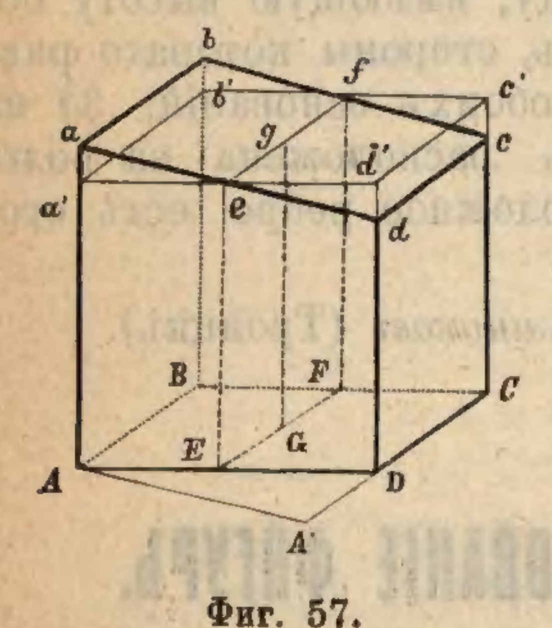
$$a''\alpha''=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{3}.$$

Объемъ усѣченной призмы ABCabc равенъ пл. ABC . $a''\alpha''$ или пл. ABC . $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{3}$.

Это показываетъ, что *усѣченная треугольная призма равновелика суммѣ трехъ пирамидъ, имѣющихъ основанiе общее съ усѣченной призмой, а вершины въ вершинахъ сѣченiя призмы.*

5. *Объемъ усѣченнаго прямого параллелепипеда равняется площади его основанiя, умноженной на среднюю ариѳметическую боковыхъ реберъ.*

Положимъ, что ABCD$abcd$ есть усѣченный прямой параллелепипедъ. Обозначимъ средины сторонъ (фиг. 57) BC, AD, bc, ad соотвѣтственно черезъ F, E, f, e. Тогда $ef=ab$ и EF=AB. По свойству трапецiй $Ff||Bb$ и $Ee||Aa$. Такимъ образомъ FEef есть трапецiя. Кромѣ того $Ff=\frac{Bb+Cc}{2}$ и $Ee=\frac{Aa+Dd}{2}$. Обозначивъ черезъ G и g средины прямыхъ EF и ef и проведя прямую Gg, находимъ $Gg\,||\,Ff$ и $Gg=\frac{Ff+Ee}{2}$. Замѣняя Ff и Ee



Фиг. 57.

ихъ значенiями, находимъ $Gg=\frac{Aa+Bb+Cc+Dd}{4}$. Такимъ образомъ прямая Gg равна средней ариѳметической боковыхъ реберъ усѣченнаго параллелепипеда и параллельна этимъ ребрамъ. Дiагонали параллелограмма ABCD пересѣкаются въ точкѣ G, а дiагонали параллелограмма $abcd$—въ g. Проведя эти дiагонали, убѣдимся, что $Gg=\frac{Aa+Cc}{2}=\frac{Bb+Dd}{2}$.

Это показываетъ, что два противоположныя ребра усѣченнаго параллелепипеда не могутъ быть наибольшими изъ всѣхъ четырехъ боковыхъ реберъ. Положимъ, что Aa и Bb суть наибольшiя ребра усѣченнаго параллелепипеда. Проводимъ черезъ точку f прямую, параллельную BC; она пересѣчетъ ребра Bb и Cc въ точкахъ b' и c'. Прямая, проведенная черезъ точку e параллельно AD, пересѣчетъ ребра Aa и Dd въ нѣкоторыхъ точкахъ a' и d'. Соединивъ эти точки прямыми, получимъ параллелограммъ $a'b'c'd'$, въ которомъ стороны $b'c'$ и $a'd'$ равны сторонамъ основанiя BC и AD, а стороны $a'b'$ и $c'd'$ равны ef. Треугольники bfb' и aea' равны, такъ какъ $b'f=a'e$, $bf=ae$ и $\angle bfb'=\angle aea'$. Такимъ образомъ $bfb'aea'$ есть треугольная призма. Точно также убѣждаемся, что $cfc'ded'$ есть треугольная призма. Эти двѣ призмы равновелики, такъ какъ основанiя ихъ bfb' и cfc' равны, а высота у нихъ общая, равная разстоянiю между плоскостями Bc и Ad. Если отрѣжемъ отъ усѣченнаго параллелепипеда ABCD$abcd$ призму $bfb'aea'$ и прило-

жимъ вмѣсто нея равновеликую призму $cfc'ded'$, то получимъ усѣченный параллелепипедъ $ABCDa'b'c'd'$. Такимъ образомъ оба эти усѣченные параллелепипеда равновелики. Но усѣченный прямой параллелепипедъ $ABCDa'b'c'd'$ можно разсматривать, какъ четыреугольную призму, у которой основаніе есть трапеція $ABb'a'$, а боковыя ребра равны AD. Опустимъ перпендикуляръ AA' на CD. Онъ будетъ представлять высоту призмы $ABb'a'DCc'd'$. Объемъ ея будетъ равенъ пл. $ABb'a'$. AA' или пл. $EFfe$. AA' т. е. Gg. $EF.AA'$. Но $EF.AA'$ есть площадь параллелограмма $ABCD$. Отсюда уже не трудно вывести, что *объемъ всякаго усѣченнаго параллелепипеда равняется площади сѣченія, перпендикулярнаго къ боковымъ ребрамъ, умноженной на среднюю ариѳметическую реберъ.*

Объемъ усѣченной треугольной пирамиды можно вывести, разбивая ее на 3 части: 1) на треугольную призму, у которой основаніе есть меньшее основаніе усѣченной пирамиды, а высота общая съ усѣченной пирамидой; 2) на треугольную пирамиду, имѣющую высоту общую съ усѣченной, а основаніемъ треугольникъ, стороны котораго равны разности между сходственными сторонами обоихъ основаній; 3) на треугольную призму, у которой боковая грань расположена на большемъ основаніи данной пирамиды, а противоположное ребро есть сторона меньшаго основанія.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

СИММЕТРИЧНО-ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ФИГУРЪ.

(*Окончаніе* *).

Свойства сопряженныхъ точекъ.

30. ТЕОРЕМА I. *Преобразованія* m *и* n *сопряженныхъ точекъ* M *и* N *симметричны относительно* BC, *и наоборотъ.*

Доказ. Извѣстно, что всякая окружность, проходящая чрезъ точки M, N, гармонически сопряженныя съ концами діаметра окружности ABC, ортогональна съ этой окружностью; поэтому всякая окружность, проходящая чрезъ преобразованія m и n точекъ M и N, ортогональна съ BC (3,d) и потому имѣетъ центръ на BC, что возможно лишь тогда, когда m и n симметричны относительно BC.

Обратно, если m и n симметричны относительно BC, то всѣ окружности, проходящія чрезъ m и n, ортогональны съ BC; поэтому всѣ окружности, проходящія чрезъ преобразованія M и N точекъ m и n, ортогональны съ окружностью ABC, и слѣд. M и N суть точки сопряженныя.

31. *Слѣдствіе.* Разстоянія сопряженныхъ точекъ M и N отъ вершинъ тр—ка ABC пропорціональны.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 179.

Ибо по предыдущей теоремѣ $Bm=Bn$; но (6)

$$Bm=CM\frac{b.c}{AC.AM},\quad Bn=CN\frac{b.c}{AC.AN};$$

слѣдов. $\frac{CM}{AM}=\frac{CN}{AN}$; точно также находимъ, что $\frac{BM}{AM}=\frac{BN}{AN}$; слѣдов.

$$\frac{AM}{AN}=\frac{BM}{BN}=\frac{CM}{CN}\left(=\frac{R}{ON}=\frac{OM}{R}\right).$$

32. ТЕОРЕМА II. *Если* M *и* N *суть сопряженныя точки, то окружность* AON *проходитъ чрезъ точку* P *пересѣченія прямой* AM *съ окружностью* ABC.

Доказ. Если точка A′ симметрична съ A относительно BC, то Am и $A'n$ пересѣкаются на BC; но Am преобразуется въ прямую AM; $A'n$— въ окружность AON, и BC—въ окружность ABC; слѣд. окружности AON и ABC и прямая AM пересѣкаются въ одной точкѣ P.

33. ТЕОРЕМА III. *Если* M *и* N *суть сопряженныя точки, то перпендикуляры въ* A *къ* AM *и* AN *пересѣкаютъ прямую* OMN *въ точкахъ* M′ *и* N′, *также сопряженныхъ.*

Доказ. Пусть m, n, m', n' суть преобразованія точекъ M, N, M′, N′; такъ какъ центръ O преобразуется въ точку A′ (18), симметричную съ A относительно BC, и точки O, M, N, M′, N′ лежатъ на одной прямой, проходящей чрезъ O, то точки A′, m, n, m', n' лежатъ на одной окружности, проходящей чрезъ A. По условію углы MAM′ и NAN′ суть прямые; поэтому углы mAm' и nAn' также прямые, а слѣд. mm' и nn' суть діаметры, а фигура $mnm'n'$—прямоугольникъ; но BC перпендикулярна къ mn и дѣлитъ mn пополамъ (30); слѣд. BC перпендикулярна и дѣлитъ пополамъ $m'n'$, т. е. m' и n' симметричны относительно BC, а потому преобразованія ихъ M′ и N′ суть точки сопряженныя.

34. Теорема I (30) есть частный случай болѣе общей теоремы, для доказательства которой слѣдуетъ замѣтить, что точки M и N, сопряженныя относительно окружности G, т. е. дѣлящія гармонически діаметръ этой окружности, имѣютъ то свойство, что отношеніе $\frac{PM}{PN}$, гдѣ P есть произвольная точка окружности G, имѣетъ постоянную величину k. Обозначивъ чрезъ G центръ окружности, о которой идетъ рѣчь, и чрезъ ϱ—ея радіусъ, будемъ имѣть

$$k=\frac{GM}{\varrho}=\frac{\varrho}{GN}=\sqrt{\frac{GM}{GN}}\ \text{ и }\ GM.GN=\varrho^2.$$

35. ТЕОРЕМА IV. *Преобразованія* m *и* n *точекъ* M *и* N, *сопряженныхъ относительно окружности* G, *суть точки, сопряженныя относительно окружности* G′, *въ которую преобразуется* G.

Доказ. По свойству сопряженныхъ точекъ, всякая окружность Φ, проходящая чрезъ M и N, ортогональна съ окружностью G; поэтому окружность, въ которую преобразуется Φ, проходя чрезъ m и n, ортогональна къ G′; слѣд. m и n суть точки сопряженныя относительно

окружности G′. Иначе: Если P есть точка окружности G, а p—ея преобразованіе на окружности G′, то (34) $\frac{PM}{PN}=k$(пост.); но $PM=$ $=pm\frac{b.c}{Ap.Am}$ и $PN=pn\frac{b.c}{Ap.An}$; поэтому $k=\frac{pm}{pn}\cdot\frac{An}{Am}$, или $\frac{pm}{pn}=k.\frac{Am}{An}$ (пост.); отсюда слѣдуетъ, что m и n суть точки сопряженныя относительно G′.

Эта теорема иначе можетъ быть выражена такъ:

Окружность, имѣющая центръ на MN *и дѣлящая* MN *гармонически, преобразовывается въ окружность съ центромъ на* mn, *дѣлящую* mn *гармонически.*

36. Если окружность G проходитъ чрезъ A, то $k=\frac{AM}{AN}=\frac{An}{Am}$ и $\frac{pm}{pn}=1$; но тогда G преобразуется въ прямую и равенство $pm=pn$ указываетъ, что m и n симметричны относительно этой прямой. Отсюда заключаемъ, что точки, симметричныя относительно прямой, можно разсматривать какъ сопряженныя относительно окружности съ безконечно большимъ радіусамъ, совпадающей съ этой прямой.

37. *Слѣдствіе.* Если точки двухъ окружностей G и G_1 суть попарно сопряженныя относительно окружности O_1, то преобразованія G′ и G'_1 этихъ окружностей обладаютъ тѣмъ-же свойствомъ относительно окружности O_1', въ которую преобразуется окружность O_1.

Пусть M есть точка окружности G, M_1—точка сопряженная съ ней относительно окружности O_1; покажемъ сначала, что геометрическое мѣсто точекъ M_1 есть окружность (G_1). Обозначивъ чрезъ R_1 радіусъ окружности O_1, по свойству сопряженныхъ точекъ будемъ имѣть $O_1M.O_1M_1=R_1^2$ (здѣсь, какъ и далѣе, центры окружностей обозначаются тѣми-же буквами, какъ и самыя окружности); слѣд. M_1 получается чрезъ простое обращеніе (par inversion) точки M, а потому геометрическое мѣсто точки M_1 есть окружность G_1, обратная съ G. По предыдущей теоремѣ, преобразованія m и m_1 точекъ M и M_1 суть точки, сопряженныя относительно окружности O_1', въ которую преобразуется O_1; преобразованія-же окружностей G и G_1 суть окружности G′ и G_1', проходящія чрезъ m и m_1; слѣд. теорема доказана.

38. Въ частномъ случаѣ, когда окружность G проходитъ чрезъ A, а вмѣсто окружности O_1 взята прямая L, окружность G_1 (36) симметрична съ G относительно L и точки окружностей G′ и G_1' суть попарно сопряженныя относительно окружности, въ которую преобразуется прямая L. Напр. окружности ABC и HBC (H—ортоцентръ) симметричны относительно BC и преобразуются въ прямую BC и окружность OBC; поэтому окружность OBC есть геометрическое мѣсто точекъ, сопряженныхъ съ точками прямой BC относительно окружности ABC.

Свойства симметрично-обратныхъ окружностей.

39. Изъ точекъ, сопряженныхъ относительно окружности G, разсмотримъ центръ G этой окружности и точку безконечно-удаленную;

такъ какъ послѣдняя имѣетъ своимъ преобразованіемъ точку A, то центръ G преобразуется въ точку g, сопряженную съ A относительно G′ (преобразованія G) (35), т. е. въ такую точку, что отношеніе разстояній всякой точки на G′ отъ g и A имѣетъ постоянную величину (34),—и если g' есть точка, сопряженная съ A относительно окружности G, то центръ G′ есть преобразованіе точки g', такъ какъ A преобразуется въ точку безконечно удаленную. Поэтому, обозначивъ чрезъ ϱ радіусъ окружности G, получимъ: $Ag.AG = b.c$, $Ag'.AG' = b.c$ и $Gg'.\ GA=\varrho^2$.

40. Центръ G′ можетъ быть найденъ на основаніи послѣднихъ равенствъ. Радіусъ ϱ' окружности G′ опредѣляется изъ пропорціи

$$\frac{\varrho'}{AG'}=\frac{\varrho}{AG};$$

ибо, если какая нибудь точка P окружности G преобразовывается въ точку p на окружности G′, то, вслѣдствіе сопряженности g съ A относительно G′, можемъ написать

$$\frac{pg}{Ap}=\frac{\varrho'}{AG'};$$

чрезъ преобразованіе-же (6) получимъ

$$\frac{pg}{Ap}=\frac{PG}{AG}=\frac{\varrho}{AG};$$

слѣдовательно

$$\frac{\varrho'}{AG'}=\frac{\varrho}{AG}.$$

41. Если окружность G проходитъ чрезъ A, то G′ обращается въ прямую, т. е. центръ G′ удаляется въ безконечность; центръ G при этомъ преобразуется въ точку g, сопряженную съ A относительно прямой G′, т. е. g есть точка, симметричная съ A относительно G′.

42. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что концентрическія окружности съ общимъ центромъ G, преобразовываются въ окружности G′, G″,..., имѣющія центры на прямой Ag и дѣлящія Ag гармонически; и обратно, окружности G′, G″,..., обладающія послѣднимъ свойствомъ, преобразуются въ окружности концентрическія.

43. ТЕОРЕМА I. 1) *Преобразованія* g,g′ *центровъ* G,G′ *симметрично обратныхъ окружностей симметричны относительно ихъ радикальной оси* X, *а центры* G,G′ *суть сопряженныя точки относительно окружности* x, *въ которую преобразуется радикальная ось* X. 2) *Радикальная ось окружности* x *съ каждой изъ окружностей* G,G′ *есть прямая* X.

Доказ. Точка g, какъ сопряженная съ A относительно окружности G′ (39), есть пересѣченіе прямой AG′ съ полярой точки A; поэтому перпендикуляръ въ срединѣ Ag есть радикальная ось для точки A и окружности G′; точно также, перпендикуляръ въ срединѣ Ag' есть ра-

дикальная ось для A и окружности G; если ω есть пересѣченіе этихъ радикальныхъ осей, то перпендикуляръ къ GG′, проходящій чрезъ ω, есть радикальная ось X окружностей G и G′ и ω есть центръ окружности Agg'; но $gg' \| G'G$, слѣд. g и g' симметричны относительно X, а потому преобразованія ихъ G и G′ суть точки сопряженныя относительно окружности x, въ которую преобразуется прямая X (36).

Возьмемъ произвольную окружность У, ортогональную съ окружностями G и G′; преобразованіе y этой окружности будетъ также ортогонально съ G и G′ такъ какъ G и G′ суть окружности симметрично-обратныя; слѣд. центръ y находится на прямой X, т. е. окружность y ортогональна съ X, а потому окружности У и x ортогональны. Такимъ образомъ, всякая окружность У, ортогональная съ G и G′, ортогональна и съ x, а слѣдов. радикальная ось окружности x и каждой изъ окружностей G и G′ совпадаетъ съ прямой X.

44. ТЕОРЕМА II. *Если двѣ симметрично-обратныя окружности* G *и* G′ *пересѣкаются въ точкахъ* B′ *и* C′, *то* 1) *окружность* AB′C′ *есть окружность* x, *въ которую преобразуется радикальная ось* X; 2) *центры подобія окружностей* G *и* G′ *суть концы діаметра окружности* AB′C′, *перпендикулярнаго къ* B′C′.

Доказ. Такъ какъ окружности G и G′ симметрично-обратны, то точки пересѣченія ихъ B′ и C′ суть преобразованія одна другой; поэтому радикальная ось X, т. е. прямая B′C′, преобразуется въ окружность AB′C′, т. е. окружность x совпадаетъ съ окружностью AB′C′. Такъ какъ центры G и G′ преобразуются въ точки g и g', симметричныя относительно X, то эти центры суть точки сопряженныя относительно окружности AB′C′.

Обозначимъ чрезъ O′ центръ окружности AB′C′, чрезъ R′—ея радіусъ и чрезъ P—какую нибудь ея точку; тогда $\frac{PG}{PG'} = \frac{O'G}{R'}$. Такъ какъ O′, центръ окружности x или AB′C′, преобразуется въ точку A′, симметричную съ A относительно X (ибо преобразованіе O′ есть точка, сопряженная съ A относительно X), то тр—ки AO′G и AgA' подобны и потому $\frac{GO'}{R'} = \frac{A'g}{Ag}$; но g и g' симметричны относительно X или B′C′, поэтому $A'g = Ag'$; слѣдов. $\frac{O'G}{R'} = \frac{Ag'}{Ag}$; отсюда чрезъ преобразованіе (6) получимъ: $\frac{O'G}{R'} = \frac{AG}{AG'} = \frac{\varrho}{\varrho'}$, гдѣ ϱ и ϱ' суть радіусы окружностей G и G′.

Такимъ образомъ $\frac{PG}{PG'} = \frac{\varrho}{\varrho'}$; предложивъ, что точка P взята на пересѣченіи прямой GG′ съ окружностью AB′C′, заключаемъ отсюда, что окружность AB′C′ проходитъ чрезъ центры подобія окружностей G и G′, т. е. прямая, соединяющая эти центры подобія, есть діаметръ окружности AB′C′, перпендикулярный къ B′C′.

45. ТЕОРЕМА III. *Если окружности* $G_1, G_2, G_3 \ldots$ *имѣютъ общую радикальную ось* X, *то и преобразованія ихъ* G_1', G_2', $G_3' \ldots$ *имѣютъ общую радикальную ось* X′.

Доказ. Пусть У есть одна изъ окружностей, ортогональная съ $G_1, G_2, G_3, \ldots$; преобразованіе $У'$ этой окружности должно быть ортогонально съ окружностями $G_1', G_2', G'_3, \ldots$; слѣд. эти окружности должны имѣть общую радикальную ось.

46. Радикальную ось системы окружностей G можно разсматривать какъ окружность той-же системы; поэтому окружность x, въ которую преобразуется X, имѣетъ общую радикальную ось X' съ системою окружностей G', т. е. x принадлежитъ къ системѣ G'; точно также окружность x', преобразованіе X', принадлежитъ къ системѣ окружностей G. Эти условія, вмѣстѣ съ условіемъ прохожденія чрезъ точку A, вполнѣ опредѣляютъ окружности x и x'.

Изложенный методъ преобразованія фигуръ въ 1-й разъ указанъ *Gob*'омъ въ его мемуарѣ *Sur divers modes de transformation.* M. *Bernès* самостоятельно развилъ теорію этого преобразованія въ статьѣ *Transformation par inversion symétrique* (J. E. 1891—1893), въ которой онъ между прочимъ показалъ употребленіе этого метода при помощи угловыхъ и триполярныхъ координатъ.

Дм. Ефремовъ (Ив.-Вознесенскъ).

СМѢСЬ.

Счетоводство у Римлянъ.—Какъ примѣръ того, насколько сложны были самыя легкія вычисленія у Римлянъ, приводимъ слѣдующую задачу.

Купецъ продалъ 144 цвѣтныхъ камня по 30 сестерцій каждый. Опредѣлить стоимость проданныхъ камней.

CXXXX × XXX

C × X = M

C × X = M

C × X = M

XXXX × XXX = MCC

XXX + XXX +

+ XXX + XXX = CXX

Итого MMMMCCCXX.

(Prometheus).

Цилиндрическіе колокола. При отливкѣ колоколовъ обыкновенной формы весьма трудно придать колоколу заранѣе извѣстный тонъ. Поэтому англійскій конструкторъ Harsington сталъ строить колокола цилиндрической формы, при которой можно заранѣе точно вычислить размѣры, какіе нужно придать колоколу, чтобы онъ издавалъ желаемый

товъ. Изъ такихъ цилиндрическихъ колоколовъ можно извлекать звуки высокаго напряженія. Такъ, звукъ колокола діаметромъ въ 1 децим. слышенъ на разстояніи 5-ти километровъ.

◆ **Для покрыванія стекла мѣдью** на него наводятъ сперва помощью кисточки слой раствора гуттаперчи въ скипидарѣ или керосинѣ, затѣмъ сушатъ, натираютъ графитомъ и вносятъ въ гальванопластическую ванну съ мѣднымъ купоросомъ.

◆ **Соединеніе каучуковыхъ кусковъ.** 1 часть гуттаперчи и 2 части гумми-эластика растворяются въ 8 частяхъ сѣроуглерода; каучуковые куски намазываются растворомъ, сушатся, образовавшійся слой нагрѣвается до плавленія и затѣмъ части прижимаются одна къ другой.

◆ **Нерастворимый въ водѣ клей** приготовляется изъ намокшаго въ водѣ столярнаго клея, который слабо нагрѣвается при постоянномъ помѣшиваніи съ соотвѣтствующимъ количествомъ льняного масла.

◆ **Клей для стекла и фарфора.** 1) 100 гр. окиси серебра и 50 гр. свинцовыхъ бѣлилъ хорошо смѣшиваются другъ съ другомъ и превращаются смѣшеніемъ съ вареным льнянымъ масломъ и копальскимъ лакомъ (3:1) въ кашу.

2) Натріевое растворимое стекло (33^0 по Боме) смѣшивается съ 3 частями французскаго мѣла и 1 частью цинковой окиси. Клей засыхаетъ послѣ 6—8 часовъ.

◆ **Алюминій можно паять** хлористымъ серебромъ, а литой алюминій кромѣ того еще и расплавленнымъ алюминіемъ.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Отчетъ мѣстнаго распорядительнаго комитета, организованнаго Физико-математическимъ Обществомъ для составленія капитала имени Н. И. Лобачевскаго. № 1. (За время съ 10 февраля 1893 по 21 октября 1893 г.). Казань. 1893.

А. П. Постниковъ. Основанія электротехники. (Въ элементарномъ изложеніи). Часть III. Динамомашины перемѣннаго тока и многофазныя. Трансформаторы. Москва. 1894. Ц. 1 р. 25 к.

Ueber den Zustand der Materie in der Nähe des kritischen Punktes. Von *B. Galitzine.* Separ.-Abdruck aus den Annal. der Physik und Chemie. Leipzig. 1893.

Обзоръ физики въ современномъ ея состояніи. Вступительная лекція, прочитанная 6-го сент. 1893 г. и. д. экстр.-орд. проф. кн. *Б. Б. Голицынымъ.* (Отт. изъ „Ученыхъ Записокъ Имп. Юрьевскаго Университета". 1893 г. № 3).

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18⁹²/₉₃ Г.

Ломжинская мужская гимназія.

Алгебра. Если произведеніе нѣкотораго числа на 0,013 часть числа, равнаго бо́льшему корню уравненія: $x^{\lg x - 2\frac{2}{3}} = 10$, раздѣлимъ на число членовъ ариѳм. прогрессіи, у которой всѣ члены—числа цѣлыя, сумма всѣхъ членовъ по порядку, начиная съ перваго, равна 2500, произведеніе 2-ого члена на 3-й равно 15, а сумма 3-ьяго и 5-аго членовъ 14, то въ остаткѣ получится число, тремя единицами меньше числа членовъ этой прогрессіи. Найти неизвѣстное число, зная, что оно > 153 и $<$ трехзначнаго числа, у котораго цыфры сотенъ и десятковъ соотвѣтственно равны 1 и 8, а цыфра единицъ = числовому значенію y, удовлетворяющему системѣ уравненій:

$$y^2 - z^2 = 9 \text{ и } \frac{y}{z} - \frac{z}{y} = {}^9/_{20}.$$

Геометрія. Объемъ конуса раздѣленъ пополамъ сферическою поверхностью, имѣющей центръ въ его вершинѣ. Опредѣлить радіусъ этой поверхности, если образующая конуса $l = 25{,}347$ центим., а наибольшій уголъ между образующими $= 64^0 27' 36''$.

Сообщилъ *А. Паренаго* (Ломжа).

ЗАДАЧИ.

№ 586. Черезъ данную точку K, лежащую внутри даннаго круга, провести хорду MN такъ, чтобы часть ея MK равнялась отрѣзку ея отъ точки K до основанія P перпендикуляра, опущеннаго на MN изъ центра круга. При какихъ условіяхъ возможна задача?

NB. Рѣшеніе требуется геометрическое.

І. Ѳедоровъ (Тамбовъ).

№ 587. Вычислить площадь равнобедреннаго треугольника по радіусамъ вписаннаго въ него и описаннаго около него круговъ.

И. Ок—чъ (Варшава).

№ 588. Показать, что сумма квадратовъ сторонъ треугольника относится къ суммѣ квадратовъ его медіанъ, какъ 4:3.

В. Россовская (Курскъ).

№ 589. Сумма квадратовъ первыхъ трехъ членовъ геометрической прогрессіи=1029. Найти пятый членъ этой прогрессіи, не прибѣгая къ рѣшенію уравненій.

С. Адамовичъ (Курскъ).

№ 590. Рѣшить систему

$$ax^m + by^n + az^p = a_1,$$
$$b_1x^{2m} + b_0y^{2n} + b_1z^{2p} = a_2,$$
$$b_2x^m z^p = cy.^{2n}$$

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 591. Не прибѣгая къ формуламъ сферической тригонометріи, опредѣлить объемъ ромбоэдра, у котораго ребра равны a, а острые углы ромбовъ, его ограничивающихъ, равны α.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШУТКА № 2.

Данъ кругъ и въ немъ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра. На одномъ изъ этихъ діаметровъ возьмемъ точку M, не совпадающую ни съ центромъ, ни съ концомъ діаметра, и проведемъ изъ нея прямую, параллельную другому діаметру, до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ N. Изъ точки N проведемъ прямую, параллельную первому діаметру, до встрѣчи со вторымъ діаметромъ въ точкѣ P. Найти длину отрѣзка MP.

А. Петровъ (Красноярскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 198 (2 сер.). Стороны квадрата $ABCD$ касаются поверхности шара; если изъ вершинъ квадрата проведемъ прямыя, касательныя къ поверхности шара, такъ чтобы онѣ пересѣкали центральную прямую OM, проходящую черезъ центръ шара O и центръ квадрата M, — то одна система касательныхъ пересѣчетъ эту прямую въ нѣкоторой точкѣ S и образуетъ ребра пирамиды $SABCD$, а другая пересѣчетъ центральную прямую въ точкѣ S' и образуетъ ребра пирамиды $S'ABCD$. По данной сторонѣ квадрата $AB=a$ и данному радіусу шара r требуется опредѣлить высоты SM и $S'M$ обѣихъ пирамидъ.

Такъ какъ касательныя, проведенныя изъ внѣшней точки къ поверхности шара равны между собою, то, называя точки касанія прямыхъ AS и AS' съ поверхностью шара соотвѣтственно черезъ N и N', найдемъ $AN=AN'={}^a/_2$. Изъ Δ-овъ AON и AOM легко найдемъ

$$AO=\sqrt{\overline{ON}^2+\overline{AN}^2}=\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}} \text{ и } MO=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{AM}^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}.$$

Изъ $\triangle$-а AOS получимъ $ON.AS=OS.AM$; вставляя сюда вмѣсто $ON-r$, вмѣсто $AS-\sqrt{\frac{a^2}{2}+\overline{SM}^2}$, вмѣсто $OS-OM+SM=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+SM$, вмѣсто $AM-\frac{a}{\sqrt{2}}$ и рѣшая полученное уравненіе относительно SM, найдемъ

$$SM=\frac{a^2\sqrt{4r^2-a^2}\pm a^2r\sqrt{2}}{2(2r^2-a^2)}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ).

№ 307 (2 сер.). Середины высотъ даннаго треугольника соединены прямыми. Опредѣлить отношеніе площади полученнаго такимъ образомъ треугольника къ площади даннаго.

Пусть X, Y, Z будутъ соотвѣтственно срединами высотъ AD, BE и CF. Проведя черезъ X прямую $NP\|BC$, черезъ $Y-MP\|AC$ и черезъ $Z-MN\|AB$, получимъ $\triangle MNP$, вершины котораго лежатъ на срединахъ сторонъ $\triangle$-а ABC, стороны равны половинамъ сторонъ $\triangle$-а ABC, а площадь равна $1/4$ площади $\triangle ABC$. Очевидно имѣемъ:

$$DB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},\ CD=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a},\ BF=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c},\ AF=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c},$$

$$AE=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\ \text{и}\ CE=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}.$$

Изъ $\triangle$-овъ PXY и PMN, MZY и MNP, NXZ и NMP, найдемъ:

$$\frac{4PXY}{\triangle}=\frac{PX.PY}{PN.PM}=\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{4a^2b^2}$$

$$\frac{4MZY}{\triangle}=\frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4b^2c^2}\ \text{и}\ \frac{4NXZ}{\triangle}=\frac{(b^2+a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{4a^2c^2},$$

гдѣ чрезъ $\triangle$ обозначена площадь даннаго треугольника ABC.

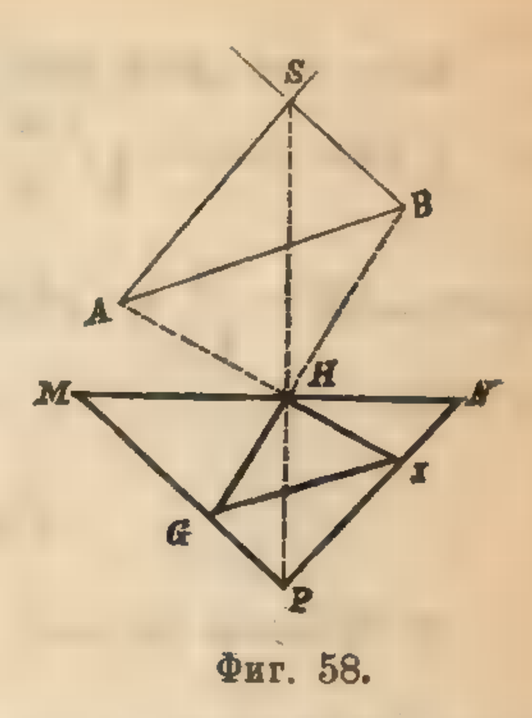
Складывая послѣднія три равенства и вычитая сумму изъ единицы послѣ преобразованій легко получимъ:

$$\frac{XYZ}{\triangle}=\frac{(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(b^2-c^2-a^2)}{16a^2b^2c^2}.$$

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ).

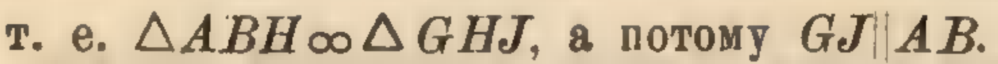
№ 355 (2 сер.). Вписать въ данный треугольникъ другой такъ, чтобы двѣ его стороны проходили черезъ двѣ данныя точки A и B, а третья сторона была параллельна прямой AB.

Пусть MNP данный треугольникъ (фиг. 58). Проводимъ $AS \| NP$ и $BS \| MP$ и соединяемъ точки S и P. Точку H пересѣченія прямой SP со стороною MN соединяемъ съ точками A и B и продолжаемъ AH и BH до пересѣченія со сторонами даннаго Δ-а MNP въ точкахъ J и G. Треугольникъ GHJ есть одинъ изъ искомыхъ, ибо $GJ \| AB$, что легко доказать. Дѣйствительно:



Фиг. 58.

$$\frac{AH}{HJ}=\frac{SH}{HP} \text{ и } \frac{BH}{HG}=\frac{SH}{HP}, \text{ откуда } \frac{AH}{HJ}=\frac{BH}{HG},$$


т. е. $\Delta ABH \infty \Delta GHJ$, а потому $GJ \| AB$.

Если обобщить задачу такъ: „Даны три пересѣкающіяся прямыя. Построить треугольникъ такъ, чтобы на каждой изъ данныхъ прямыхъ лежала одна изъ его вершинъ, чтобы двѣ его стороны проходили черезъ двѣ данныя точки A и B, а третья сторона была бы параллельна AP“, то такая задача имѣетъ, какъ не трудно видѣть, вообще 6 рѣшеній.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

BN. Нѣсколько иное, но вполнѣ вѣрное рѣшеніе было получено отъ *К. Щиголева* изъ Курска.

№ 446 (2 сер.). Бертранъ допустилъ и Чебышевъ доказалъ, что при $a>1$ между числами a и $2a$ содержится простое число. Зная это, требуется опредѣлить maximum цѣлаго числа A подъ условіемъ, чтобы всякое цѣлое число, меньшее A и взаимно простое съ A, было числомъ абсолютно простымъ.

Означимъ черезъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$$

рядъ натуральныхъ простыхъ чиселъ, начиная съ $\alpha_1=2$, и пусть α_n будетъ наибольшее простое число, входящее множителемъ въ составъ A. Разлагая A на первоначальные множители, получимъ:

$$A=\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}\ldots\ldots\alpha_n^{m_n},$$

гдѣ показатели m суть цѣлыя числа, изъ коихъ m_n не меньше 1-цы, а остальныя не меньше нуля. Наименьшее число, взаимно простое съ A, есть наименьшее первоначальное число α, не входящее множителемъ въ составъ A. Имѣемъ очевидно $\alpha=\alpha_{n+1}$, когда ни одинъ изъ показателей m не равенъ нулю, и $\alpha=\alpha_k$, когда m_k есть первый равный нулю показатель въ ряду показателей m. Наименьшее составное число β, взаимно простое съ A, содержитъ по крайней мѣрѣ два простыхъ множителя, изъ коихъ каждый не меньше α, поэтому $\beta=\alpha^2$; слѣдовательно, для того, чтобы всякое число, меньшее A и взаимно простое съ A, было числомъ абсолютно простымъ, необходимо и достаточно, чтобы было

$$A=2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}\ldots\ldots\alpha_n^{m_n}<\alpha^2.$$

Когда $m_1=0$, то $\alpha=\alpha_1=2$ и $A=3^{m_2}\,.\,5^{m_3}\ldots\ldots\alpha_n^{m_n}<2^2$, что возможно только при $A=3$. Исключивъ этотъ случай, докажемъ, что ни одинъ изъ показателей, предшествующихъ показателю m_n, не равенъ нулю.

Дѣйствительно, если $m_2=0$, то $\alpha=\alpha_2=3$; $A=2^{m_1}\,.\,5^{m_3}\ldots\alpha_n^{m_n}<3^2$, что возможно только при $n=1$; $m_n=m_1$, т. е. въ ряду показателей m совсѣмъ нѣтъ показателей, предшествующихъ m_n. Предположивъ теперь m_1 и m_2 отличными отъ нуля и допустивъ, что m_k есть первый равный нулю показатель въ ряду показателей m, получимъ $\alpha=\alpha_k$ и

$$A=2^{m_1}\,.\,3^{m_2}\ldots\ldots\alpha_{k-1}^{m_{k-1}}\,.\,\alpha_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots\ldots\alpha_n^{m_n}<\alpha_k^2.$$

Но число

$$2.\;3\ldots\ldots\alpha_{k-1}-1,$$

будучи больше α_{k-1}, есть число взаимно простое относительно каждаго изъ чиселъ $2,3,\ldots\ldots,\alpha_{k-1}$, поэтому оно либо равно α_k, либо больше, чѣмъ α_k. Въ обоихъ случаяхъ

$$2.3\ldots\ldots\alpha_{k-1}>\alpha_k,$$

а такъ какъ $\alpha_n>\alpha_k$, то

$$2.3\ldots\ldots\alpha_{k-1}\alpha_n>\alpha_k^2,$$

откуда слѣдуетъ a fortiori

$$A=2^{m_1}\,.\,3^{m_2}\ldots\ldots\alpha_{k-1}^{m_{k-1}}\,.\,\alpha_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots\ldots\alpha_n^{m_n}>\alpha_k^2,$$

чего однако же по предыдущему допустить не можемъ. Такимъ образомъ, исключая случай $A=3$, ни одинъ изъ показателей m не равенъ нулю, но тогда $\alpha=\alpha_{n+1}$ и

$$A=2^{m_1}\,.\,3^{m_2}\ldots\ldots\alpha_n^{m_n}<\alpha_{n+1}^2,$$

откуда a fortiori

$$2.3\ldots\ldots\alpha_n<\alpha_{n+1}^2. \qquad (1)$$

Уже при $n=4$ это неравенство не существуетъ $(2.3.5.7>11^2)$ и можно доказать, что если неравенство

$$2.3\ldots\ldots\alpha_n>\alpha_{n+1}^2, \qquad (2)$$

противорѣчащее неравенству (1), существуетъ для какого либо значенія $n>2$, то это неравенство (2) существуетъ и для $n+1$. Дѣйствительно, изъ неравенства (2) получаемъ

$$2.3\ldots\ldots\alpha_n\,\alpha_{n+1}>\alpha_{n+1}^3,$$

слѣдовательно неравенство (2) будетъ оправдано для $n+1$, если

$$\alpha_{n+1}^3>\alpha_{n+2}^2. \qquad (3)$$

Но, по допущенію Бертрана, между α_{n+1} и $2\alpha_{n+1}$ содержится простое число, такъ что $2\alpha_{n+1}>\alpha_{n+2}$,

$$4\alpha_{n+1}^2 > \alpha_{n+2}^2,$$

поэтому неравенство (3) существуетъ, если

$$\alpha_{n+1}^3 > 4\alpha_{n+1}^2 \text{ или } \alpha_{n+1} > 4,$$

что имѣетъ мѣсто при $n \geqslant 2$, уже $\alpha_{2+1}=5 > 4$. Такимъ образомъ видимъ, что въ выраженіи для A число n должно быть меньшее 4-хъ т. е. возможны только три случая:

$$A=2^{m_1} < 3^2;\ A=2^{m_1}\,.\,3^{m_2}<5^2;\ A=2^{m_1}\,.\,3^{m_2}\,.\,5^{m_3}< 7^2,$$

гдѣ всѣ показатели отличны отъ нуля. Отсюда, включая и прежде найденное значеніе $A=3$, находимъ, что A имѣетъ только слѣдующія значенія

2,3,4,6,8,12,18,24,30.

Maximum $A=30$.

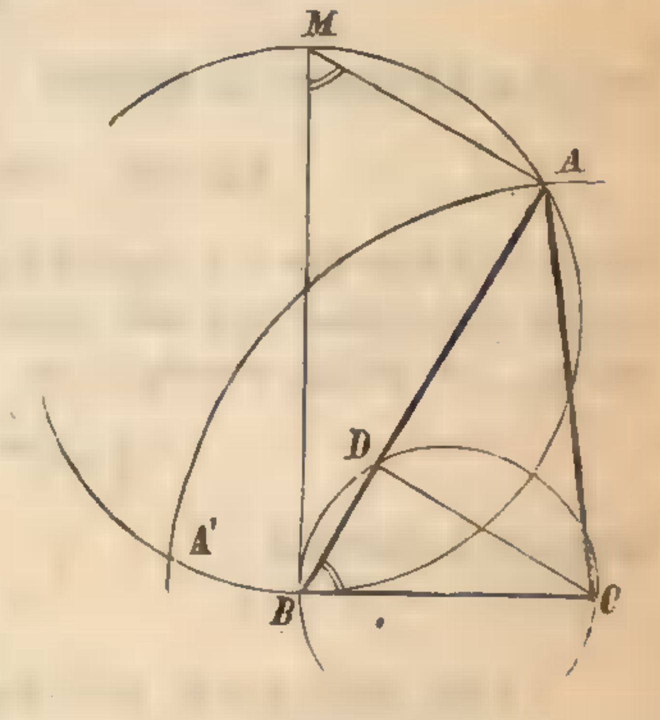
NB. На эту задачу не было получено ни одного рѣшенія. Помѣщенное рѣшеніе принадлежитъ автору задачи, С. Шатуновскому.

№ 465 (2 сер.). Построить треугольникъ по двумъ даннымъ сторонамъ и по отношенію между третьей стороной и высотой, на нее опущенной.

Пусть даны $a=BC$, $b=AC$ и $c/h_c = n$. На сторонахъ прямого угла отъ его вершины B (фиг. 59) откладываемъ $BC=a$ и $BM=na$. На MB, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность и изъ C радіусомъ b описываемъ дугу, пересѣкающую окружность въ точкахъ A и A'. Треугольники ABC и $A'BC$ суть требуемые, ибо

$$\frac{CD}{BC}=\frac{AB}{BM}=\frac{AB}{n.BC}, \text{ откуда } \frac{AB}{CD}=n.$$

П. Хлѣбниковъ (Тула); *К. Щиголевъ* (Курскъ).



Фиг. 59.

№ 475 (2 сер.). Проведенъ шаръ, касательный къ ребрамъ правильнаго октаэдра, ребро котораго равно a. Опредѣлить часть объема шара, заключенную внутри октаэдра.

Искомый объемъ есть разность между объемомъ шара радіуса $a/2$ и увосьмереннымъ объемомъ сегмента, высота котораго есть $a/2-(a:\sqrt{6})$, отсѣченнаго отъ шара гранью октаэдра. Поэтому

$$V=\frac{\pi a^3}{6}-\frac{\pi a^3(18-7\sqrt{6})}{27}=\frac{\pi a^3(14\sqrt{6}-27)}{54}.$$

В. Баскаковъ (Ив.-Вознес.); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 487 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$4x^4+6x^3+3x^2+{}^9/_{16}x-14{}^1/_2=0.$$

Послѣ незначительныхъ преобразованій представляемъ уравненіе въ такомъ видѣ:

$$(8x^2+6x)^2+{}^3/_2(8x^2+6x)-232=0.$$

или

$$y^2+{}^3/_2y-232=0,$$

гдѣ $y=8x^2+6x$. Дальнѣйшее рѣшеніе ясно.

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm5\sqrt{5}}{8},\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{-119}}{8}.$$

П. Писаревъ (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 489 (2 сер.). Показать, что

$$1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a.\cos b.\cos c=4\mathrm{sn}p.\mathrm{sn}(p-a).\mathrm{sn}(p-b).\mathrm{sn}(p-c),$$

гдѣ $2p=a+b+c$.

Придавъ къ первой части равенства и вычтя изъ нея $\cos^2b.\cos^2c$, получимъ

$$\mathrm{sn}^2b-\cos^2c.\mathrm{sn}^2b-(\cos a-\cos b.\cos c)^2=\mathrm{sn}^2b.\mathrm{sn}^2c-(\cos a-\cos b.\cos c)^2=$$

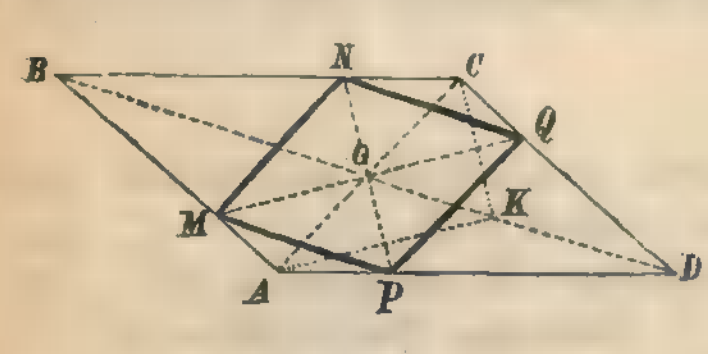
$$=[\mathrm{sn}b.\mathrm{sn}c+\cos a-\cos b.\cos c][\mathrm{sn}b.\mathrm{sn}c-\cos a+\cos b.\cos c]=$$

$$=[\cos a-\cos(b+c)][\cos(b-c)-\cos a]=$$

$$=4\mathrm{sn}\frac{a+b+c}{2}\cdot\mathrm{sn}\frac{b+c-a}{2}\cdot\mathrm{sn}\frac{a+b-c}{2}\cdot\mathrm{sn}\frac{a+c-b}{2}=4\mathrm{sn}p.\mathrm{sn}(p-a).\mathrm{sn}(p-b)\mathrm{sn}(p-c).$$

В. Шишаловъ (с. Середа); *И. О.* (Варшава); *С. Бабанская* (Тифлисъ).

№ 491 (2 сер.). Въ параллелограммъ вписанъ ромбъ такъ, что стороны его параллельны діагоналямъ параллелограмма. По даннымъ діагоналямъ параллелограмма опредѣлить сторону ромба.



Фиг. 60.

Чтобы вписать такой ромбъ въ параллелограммъ $ABCD$ (фиг. 60), откладываемъ $OK=OA$ и черезъ O проводимъ $MQ\|AK$ и $NP\|CK$. Легко доказать, что $MNQP$ есть ромбъ. Пусть $AC=a$, $BD=b$. Имѣемъ

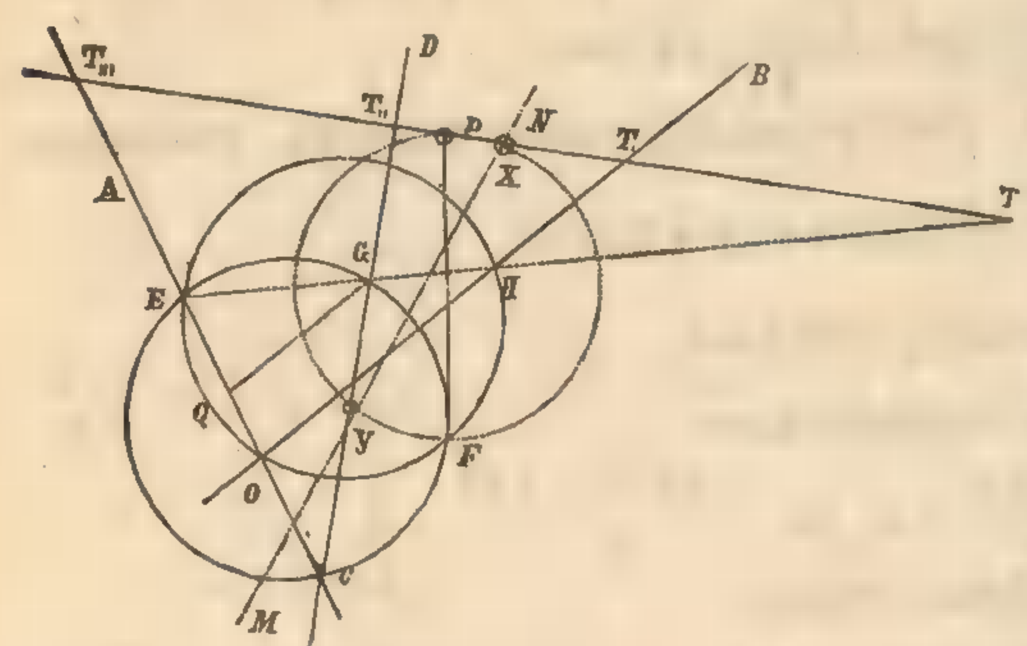
$$\frac{MN}{AC}=\frac{BM}{AB}=\frac{OB}{BK}.$$

Такъ какъ $AC=a$, $OB={}^b/_2$, $BK=\frac{a+b}{2}$ то

$$\frac{MN}{a}=\frac{b}{a+b},\text{ откуда } MN=\frac{ab}{a+b}.$$

А. Охитовичъ (Сарапулъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Бабанская, А. Васильева* (Тифлисъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

№ 541 (1 сер.). Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между двумя данными прямыми дѣлился третьей данной прямой въ требуемомъ отношеніи.



Фиг. 61.

Проведемъ сначала какую нибудь прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между данными прямыми OA и OB дѣлился третьей прямой CD въ данномъ отношеніи $m:n$. Для этого отъ точки O (фиг. 61) откладываемъ на OA части OQ и QE такъ, чтобы $OQ:QE=n:m$. Проводимъ $QG\|OB$ до пересѣченія съ CD въ точкѣ G и EG до пересѣченія съ OB въ точкѣ H. Тогда $EG:GH=m:n$. Окружности, описанныя около треугольниковъ OEH и CEG пересѣкаются въ точкѣ F. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки F на прямыя OA,OB,CD,EH лежатъ на одной прямой MN. Соединяемъ данную точку P съ F и на прямой FP описываемъ какъ на діаметрѣ окружность, пересѣкающую прямую MN въ точкахъ X и $У$. Прямыя PX и $PУ$ суть искомыя. Докажемъ это для прямой PX. Пусть она пересѣкаетъ прямыя EH,OB,CD,OA по порядку въ точкахъ $T,T_{/},T_{//},T_{///}$. Если опишемъ окружности около треугольниковъ $THT_{/}$, $TGT_{//}$, $TET_{///}$, то онѣ должны пройти черезъ F, ибо основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ F на стороны вписанныхъ въ нихъ треугольниковъ лежать на одной прямой MN. Отсюда-же слѣдуетъ, что

$$T_{///}T_{//}:T_{//}T_{/}=EG:GH=m:n.$$

Задача вообще имѣетъ два рѣшенія, въ частныхъ случаяхъ—одно или ни одного.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

ЗАПОЗДАВШІЯ РѢШЕНІЯ задачъ 2-й серіи получены отъ *П. Иванова* (Одесса)—№ 379, *С. Луневскаго* (Калуга)—№ 379, *И. Алферова* (Красноуфимскъ)—№ 379, *К. Геншеля* (Курскъ)—№ 437, *М. Окаса* (Мерьяма)—№№ 434, 435, 448, 474, *Р. Эйхлера* (Варшава)—№ 478, *О. Оранской* (Курскъ)—474, 478; *А. Варенцова* (Р. н. Д.)—468; *Е. Красницкой* (Курскъ) — 452; *Н. Щекина* (Курскъ) — 478; *К. Щиголева* (Курскъ)—368, 469; *К. Исакова* (Тифл.)—460.

ОСТАЛИСЬ НЕРѢШЕННЫМИ изъ предложенныхъ въ XIII и XIV семестрахъ и первыхъ 6-и №№ XV семестра задачи: 380, 381, 394, 402, 418, 425, 426, 439, 444, 453, 461, 467, 484, 490, 493, 494, 498, 511, 521, 525, 529, 530, 532, 533, 537, 544, 545, 546, 548 и 554.

Конецъ XV-го семестра.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 30-го Декабря 1893 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

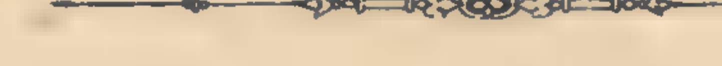
ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

Э. К. Шпачинскимъ.

ПЯТНАДЦАТЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 169 — 180.



ОДЕССА.
„Центральная Типографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова
1893.

Дозволено цензурою. Одесса, 30-го декабря 1893 года.

СОДЕРЖАНІЕ

„ВѢСТНИКА ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“

ЗА ПЯТНАДЦАТЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 169 — 180.

СТАТЬИ. *)

	Стр.
Старое и новое о нѣкоторыхъ простѣйшихъ физическихъ явленіяхъ, (окончаніе). Проф. *Н. Любимова*, №№ 169, 170, 172 и 174 .	5, 25, 73, 128
Къ трисекціи угла. *Э. Шпачинскаго*. № 166	10
Блуждающіе огоньки. *Э. Шпачинскаго*. № 170	30
О приближенныхъ вычисленіяхъ безъ логариѳмовъ. *Д. Ефремова*. №№ 170 и 171	33, 55
*Свойства поверхностей жидкихъ тѣлъ, (окончаніе) *К. Чернышева*. №№ 171, 173, 174, 176, 177 и 178	49, 103, 132, 169, 193, 220
Къ вопросу объ образовательномъ значеніи алгебры. *А. Симко*. № 171	60
*Введеніе въ методику физики. Проф. *Ѳ. Шведова*. №№ 172, 175 .	78, 154
Новые многоугольники. *С. Пороховщикова*. № 172	84
*Н. И. Лобачевскій. *И. Бондаренко*. № 173	97
Вступительная лекція Э. К. Шпачинскаго на „Физико-Математическихъ Педагогическихъ Курсахъ“ въ г. Одессѣ. № 173 . . .	107
*Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго. *В. Кагана*. №№ 174, 178 и 179	121, 213, 237
*Логическая машина Джевонса. Проф. *И. Слешинскаго*. № 175 . .	145
По поводу пародоксальной формулы для π проф. Никольсона. *С. Кричевскаго*. №№ 176 и 177	175, 198
Къ статьѣ „Новые многоугольники“. *И. Износкова*. № 176	180
Простая задача и отдѣльное дѣйствіе въ ариѳметикѣ. *И. Синскаго*. №№ 176, 177 и 178	181, 201, 224
Объ одномъ слѣдствіи изъ законовъ равномѣрно ускореннаго движенія. *С. Стемпневскаго*. № 179	245
Симметрично обратное преобразованіе фигуръ. *Д. Ефремова*. №№ 179 и 180	247, 266
Нужны ли экзамены по математикѣ и физикѣ? *Б. Герна*. № 179 . .	253
Новыя доказательства теоремъ объ измѣреніи объемовъ. *П. Свѣшникова*. № 180	261

*) Отмѣченныя звѣздочкой статьи издаются отдѣльными брошюрами.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Стр.

Къ выводу формулы длины окружности. *В. Захарова.* № 174 . . . 134

Тригонометрическое вычисленіе площадей сегмента и пояса круга. *А. Жбиковскаго* № 174 . . . 136

Способъ построенія группы луночекъ, сумма которыхъ квадрируется. *Е. Буницкаго.* № 175 . . . 159

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Вліяніе низкихъ температуръ на ходъ химическихъ реакцій. *В. Г.* № 169 . . . 17

Новая комета Rordame-Quénisset. *В. Г.* № 170 . . . 40

Дѣйствіе растворовъ солей и щелочей на стекло. *В. Г.* № 170 . . 41

Способность газовъ свѣтиться. *В. Г.* № 171 . . . 65

Удѣльная теплота воды. *В. Г.* № 171 . . . 65

Вліяніе влажности на химическіе процессы. *В. Г.* № 171 . . . 65

Суточныя колебанія напряженія силы тяжести. *В. Г.* № 172 . . . 87

Связь между мерцаніемъ звѣздъ и перемѣной погоды. *В. Г.* № 172 87

ОТКРЫТІЯ и ИЗОБРѢТЕНІЯ.

Освѣтительный приборъ для подводныхъ фотографій. *В. Г.* № 173 112

Предохранитель отъ взрыва свѣтильнаго газа. *В. Г.* № 173 . . . 113

Новое примѣненіе воздушныхъ шаровъ. *В. Г.* № 175 . . . 161

Телавтографъ. *В. Г.* № 175 . . . 162

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Гармоноскопъ. *П. Штанделя.* № 169 . . . 18

Горѣніе воздуха. *П. Штанделя.* № 169 . . . 19

Новый амперметръ. *В. Г.* № 169 . . . 19

Простой способъ установки астрономической трубы. *В. Г.* № 169 . 19

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Въ № 169 . . . стр. 20
" " 170 . . . " 41
" " 171 . . . " 66
" " 172 . . . " 87
" " 173 . . . " 113
Въ № 174 . . . стр. 137
" " 176 . . . " 184
" " 177 . . . " 205
" " 178 . . . " 228

СМѢСЬ.

Счетоводство у Римлянъ. № 180 . . . 271

Цилиндрическіе колокола. № 180 . . . 271

Покрываніе стекла мѣдью. № 180 . . . 272

Соединеніе каучуковыхъ кусковъ. № 180 . . . 272

Нерастворимый въ водѣ клей. № 180 . . . 272

Клей для стекла и фарфора. № 180 . . . 272

Паяніе аллюминія. № 780 . . . 272

Корреспонденція. Проф. *Слугинова* въ № 171 . . . 68

РЕЦЕНЗІИ.

Стр.

Ключъ къ рѣшенію ариѳметическихъ задачъ на всѣ „правила". Составилъ Н. В. Шпаковичъ. Кіевъ. 1893.—Опытъ систематизаціи употребительнѣйшихъ ариѳметическихъ задачъ по типамъ. Составилъ А. А. Терешкевичъ. Москва. 1893. *Ж.* № 169 . . . 13

ЗАЯВЛЕНІЯ РЕДАКЦІИ.

Отъ редакціи. № 169 1

Отъ редакціи. № 177 193

Письмо въ редакцію *Г. Андреянова.* № 178 228

БИБЛІОГРАФІЯ.

Доставленныя въ редакцію книги и брошюры. №№ 173, 174, 175, 180 . 114, 138, 162, 272

На красной обложкѣ:

Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій въ №№ 169, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177.

Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій, въ №№ 173, 174, 175, 176.

Обзоръ научныхъ журналовъ. *Д. Е.* въ №№ 169, 170, 171, 173, 174, 179, 180.

ЗАДАЧИ.

		Стр.			Стр.
№№ 511—518	въ № 169	23	№№ 555—561	въ № 175	162
„ 519—526	„ „ 170	45	„ 562—567	„ „ 176	185
„ 527—533	„ „ 171	70	„ 568—573	„ „ 177	206
„ 534—540	„ „ 172	89	„ 574—579	„ „ 178	229
„ 541—547	„ „ 173	115	„ 580—585	„ „ 179	258
„ 548—554	„ „ 174	139	„ 586—591	„ „ 180	273

Задача на премію. Проф. О. *Хвольсона* въ № 173, стр. 116.

Тема на премію. *С. Шатуновскаго* въ № 174, стр. 140.

Маленькіе вопросы. №№ 1—3 въ № 178 стр. 230.

Математич. шутки въ №№ 173, 180, стр. 116.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ.

Въ Симферопольской гимназіи. № 170 42

„ Тамбовской „ „ 43

„ Варшавскомъ реальномъ училищѣ. № 170 43

„ Ломжинской гимназіи. № 180 273

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

a) первой серіи.

477	въ № 174	531	въ № 179
510	„ „ 174	541	„ „ 180

b) второй серіи.

7	въ № 170	337	въ № 169	434	въ № 174
12	„ „ 170	340	„ „ 169	435	„ „ 174
15	„ „ 172	347	„ „ 172	437	„ „ 174
17	„ „ 170	348	„ „ 170	438	„ „ 174
19	„ „ 171	350	„ „ 173	440	„ „ 175
28	„ „ 172	351	„ „ 177	442	„ „ 175
44	„ „ 175	352	„ „ 174	445	„ „ 175
67	„ „ 175	353	„ „ 177	446	„ „ 180
70	„ „ 175	355	„ „ 180	447	„ „ 175
75	„ „ 176	357	„ „ 178	448	„ „ 175
128	„ „ 176	358	„ „ 177	450	„ „ 175
129	„ „ 176	359	„ „ 178	452	„ „ 178
131	„ „ 177	360	„ „ 176	456	„ „ 178
147	„ „ 176	367	„ „ 174	459	„ „ 178
198	„ „ 180	369	„ „ 176	460	„ „ 178
200	„ „ 176	373	„ „ 178	465	„ „ 180
219	„ „ 176	376	„ „ 173	468	„ „ 179
251	„ „ 173	382	„ „ 170	469	„ „ 178
266	„ „ 173	383	„ „ 170	470	„ „ 178
278	„ „ 178	385	„ „ 176	474	„ „ 179
279	„ „ 178	387	„ „ 176	475	„ „ 180
281	„ „ 177	391	„ „ 173	478	„ „ 178
307	„ „ 180	392	„ „ 173	487	„ „ 180
323	„ „ 171	399	„ „ 175	489	„ „ 180
324	„ „ 178	432	„ „ 176	491	„ „ 180
336	„ „ 177	433	„ „ 178		

Запоздалыя рѣшенія въ № 180.

Нерѣшенныя задачи въ № 180.

СПРАВОЧНЫЯ ТАБЛИЦЫ на красной обложкѣ.

№ XVIII	въ №№ 169, 170	№ XXII	въ № 174
№ XIX	» » 171	№ XXIII	» » 175
№ XX	» » 172	№ XXIV	» » 176
№ XXI	» » 173	№ XXV	» » 177, 178

Портретъ Н. И. Лобачевскаго при № 177.

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ.

№№ 1—3 въ № 172 . . . . стр. 93
№№ 4—5 » № 173 . . . . » 119
№ 6 » » 175 . . . . » 168
№ 7 » » 177 . . . . » 211

